基于数学核心素养的试题命制

——以2020年莆田市高三质检理科第16题为例

翁建新[1] 林永忠[1]蔡海涛[2]

(1.福建省莆田第四中学 ; 2.福建省莆田第二中学)

本文系2019年度莆田市名师专项课题“核心素养下高中生数学自主探究学习策略研究”(课题编号: PTMS19004)研究成果之一.

[摘要]当前高考试题实现从能力立意到素养导向的转变.基于素养导向，解三角形客观题命制倡导多思少算，凸显几何背景，力求小题巧解.本文以一道莆田市质检解三角形客观题命制为例进行阐述.

[关键词] 素养导向 试题命制 一题多解 解三角形

笔者参加了2020年福建省莆田市高三市质检的命题工作，命制了一道以解三角形为背景的填空压轴题，此题具有一定的难度、梯度和区分度，这也是近年高考全国卷的命题风格．试题的命制以考查学生素养为导向，本文就这道题的命制与思考与同行交流.

解三角形是高中数学的核心内容，也是高考必考内容，重点考查正弦定理和余弦定理及其应用.当前高考正在实现从能力立意到素养导向的转变[1]，解三角形在客观题的考查中倡导多思少算，有时可分析已知条件中的几何背景，力求小题巧解[2].

1.试题呈现

(2020年莆田市高三质检・理16) $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c .已知 $c\cos B+b\cos(A+B)=0$. BD 是 AC 边上的中线，且 $BD=1$,则 $\triangle ABC$ 面积的最大值________.

2.试题分析

试题主要考查正弦定理、余弦定理、三角形的面积公式等知识，考查运算求解能力和创新意识，考查函数与方程、数形结合等数学思想，考查数学抽象、数学运算、直观想象等核心素养.

由已知条件 $c\cos B+b\cos(A+B)=0$ 结合 $\cos(A+B)=-\cos C$ ，利用正弦定理，易得 $b=c$.则问题可转化为：$\triangle ABC$ 中，$b=c$ ，BD 是 AC 边上的中线，且 $BD=1$ ，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值，如图1.

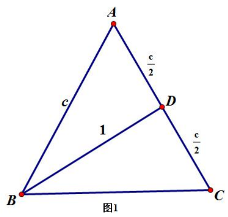


图1

在 $\triangle ABD$ 中运用余弦定理，得 $1=c^2+\dfrac{c^2}{4}-c^2\cos A$ ①，则所求目标 $\triangle ABC$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}c^2\sin A$ ②.

3.试题解析

3.1思维角度一：从数的角度分析

注意到面积的表达式中含有两个参数，故考虑消元，将目标式变形为单元函数，再利用函数知识求最值.首先可考虑消去变量 c ，由①得 $c^2=\dfrac{4}{5-4\cos A}$ ，消去变量 c 可得 $S=\dfrac{2\sin A}{5-4\cos A}$ ，进而求这个函数的最值，有以下四种方法：

法一：利用三角函数的有界性求解

由 $S=\dfrac{2\sin A}{5-4\cos A}$ ，得 $2\sin A+4S\cos A=5S$ ，所以 $\sqrt{4+16S^2}\sin(A+j)=5S$ ，由 $\dfrac{5S}{\sqrt{4+16S^2}}\leqslant 1$ ，解得 $0<S\leqslant\dfrac{2}{3}$ ，当且仅当 $\cos A=\dfrac{4}{5}$ 时，S 取到最大值 $\dfrac{2}{3}$.

法二：利用倍角公式（或万能公式）变形，再利用基本不等式求解

设 $A=2q$ ，$S=\dfrac{2\sin A}{5-4\cos A}=\dfrac{4\sin q\cos q}{9\sin^2 q+\cos^2 q}=\dfrac{4}{9\dfrac{\sin q}{\cos q}+\dfrac{\cos q}{\sin q}}\leqslant\dfrac{2}{3}$,当且仅当 $\tan q=\dfrac{1}{3}$ 时，S 取到最大值 $\dfrac{2}{3}$.

法三：利用斜率的几何意义求解

$S=-\frac{1}{2}\times\frac{0-\sin A}{\frac{5}{4}-\cos A}$，则 $\frac{0-\sin A}{\frac{5}{4}-\cos A}$ 表示坐标平面上点 $P(\cos A,\sin A)$ 和点 $Q\left(\frac{5}{4},0\right)$ 之间连线的斜率，点 $P(\cos A,\sin A)$ 是单位圆在 x 轴上方的部分，如图 2.

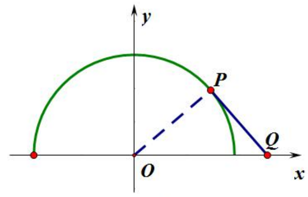


图2

要求面积 S 的最大值，先求 $\frac{-\sin A}{\frac{5}{4}-\cos A}$ 即 PQ 斜率的最小值，易知当 PQ 与半圆相切时，斜率最小，此时 $k_{PQ}=-\frac{4}{3}$，$S=\frac{2}{3}$.

法四：利用导数研究函数最值求解

设 $S=\frac{2\sin A}{5-4\cos A}$，则 $S'=\frac{10\cos A-8}{(5-4\cos A)^2}$，易得当 $\cos A=\frac{4}{5}$ 时，S 取到最大值 $\frac{2}{3}$.

法五：通过换元，转化为二次函数求解

由①得 $\cos A=\frac{\frac{5}{4}c^2-1}{c^2}$，消去变量 A，②式可化为 $S=\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{9}{16}c^4+\frac{5}{2}c^2-1}$，

令 $t=c^2$，则 $S^2=\frac{1}{4}(-\frac{9}{16}t^2+\frac{5}{2}t-1)$，则当 $t=\frac{20}{9}$，即 $c=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 时，S^2 的最大值为 $\frac{4}{9}$，

即 $S_{\triangle ABC}$ 取到最大值 $\frac{2}{3}$.

3.2 思维角度二：从形的角度分析

法六：如图 3，在△ABD 中，作 BD 边上的高 AE，设 $AE=h$，$AD=m$，$DE=x$，则 $AB=2m$，$BE=1-x$，$m^2-x^2=4m^2-(1-x)^2$，

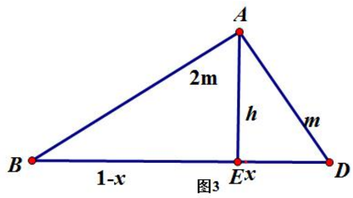


图3

整理得 $m^2=\frac{1-2x}{3}\Rightarrow h^2=m^2-x^2=-x^2-\frac{2}{3}x+1$，

则 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}h=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2-\frac{2}{3}x+1}\leqslant\frac{1}{3}$，即当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取到最大值 $\frac{2}{3}$.

事实上，三角形的中线长度问题，还可以构造平行四边形来求解，在平行四边形 $ABCD$ 中，对角线的平方和等于各边的平方和. 即：$|AC|^2+|BD|^2=2(|BA|^2+|BC|^2)$，则有

法七：如图 4，在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $AB=2m$，$BC=2n$，作 $AM\perp BC$ 于 M，设 $AM=h$，则 $4+4m^2=8m^2+8n^2\Rightarrow m^2=1-2n^2$，

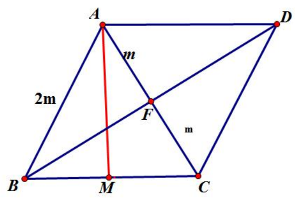


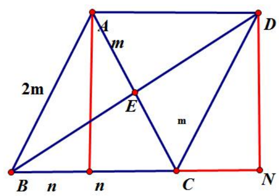
图4

所以 $S^2_{\triangle ABC}=n^2h^2=n^2(4m^2-n^2)=n^2(4-9n^2)$

$=\frac{1}{9}\times 9n^2(4-9n^2)\leqslant\frac{1}{9}(\frac{9n^2+4-9n^2}{2})=\frac{4}{9}$，

当 $n^2=\frac{2}{9}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取到最大值 $\frac{2}{3}$.

这种方法是利用平行四边形来寻找 n 与 h 的关系式，也可以利用垂直关系来寻找 n 与 h 的关系式.



法八：如图 5，在 Rt△BND 中，$9n^2+h^2=4\geqslant 6nh$，所以有 $S_{\triangle ABC}=nh\leqslant\frac{2}{3}$.

当且仅当 $h=3n=\sqrt{2}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 取到最大值 $\frac{2}{3}$.

法九：如图 6，作底边 BC 的高 AM 交 BD 于 O 点，易得 $OB=OC$，又由角平分线性质知 $\frac{AB}{AD}=\frac{BO}{OD}=2\Rightarrow OB=\frac{2}{3}$，

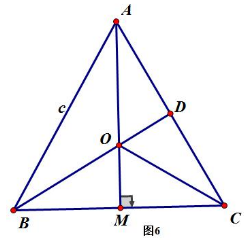


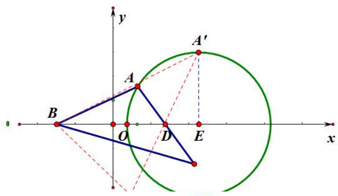
图6

故 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle OBC}=\frac{3}{2}OB\cdot OC\sin\angle BOC=\frac{2}{3}\sin\angle BOC\leqslant\frac{2}{3}$.

发现题中的“隐圆”——点 A 的轨迹为阿波罗尼斯圆.即把问题转化为:

已知 $BD=1$，点 A 到 B，D 两点的距离之比为 2，求△ABC 面积（即△ABD 面积的 2 倍）的最大值.

法十：以 BD 中点 O 为坐标原点，直线 BD 为 x 轴，建立如图 7 平面直角坐标系，可得 A 的轨迹方程为：$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+y^2=\frac{4}{9}$.可得 S 的最大值为 $\frac{2}{3}$.



又注意到 $\frac{AB}{AD}$ 的比值为定值，可联想内外角平分线性质求解.

法十一：如图 8，作 $\angle BAD$ 的内外角平分线 AE，AF 可得:

$\frac{BE}{ED}=\frac{BF}{FD}=\frac{AB}{AD}\Rightarrow EF=\frac{4}{3}$，又在△$AEF$ 中，$\angle EAF=90^{\circ}$，

则 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}AE\times AF\leqslant\frac{1}{4}EF^2=\frac{4}{9}$，则

$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ABD}=\frac{3}{2}S_{\triangle AEF}\leqslant\frac{2}{3}$.

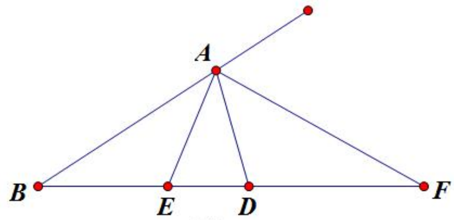


图8

4.命题思考

4.1 立足于教材的试题演变

本道试题的命制是以人教 A 版必修 2 第 124 页习题 4.1 B 组第 3 题为背景.该题目是：已知点 M 与两个定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$ 的距离的比为 $\frac{1}{2}$，求点 M 的轨迹方程.

高考试题源于教材，高于教材．因此，模拟卷试题的命制应依纲据本，万变不离其宗，其中“本”指的就是数学课本，“宗”就是数学课本中数学核心概念以及重要数学思想方法. 数学课本中的例题、习题大多都蕴涵着丰富深刻的背景，以此为背景进行改编重组或变式拓展，都是试题命制的好素材.

4.2 突出重点，综合考查

本道试题考查了学科内知识的综合应用，既考查了解三角形中面积的有关知识，试题的几何背景又考查了解析几何的有关知识，把三角函数与解析几何的两个主干知识进行综合考查，这与全国卷试题的命制思路基本吻合.

本题的入口较宽，不难得到面积的表达式，但在求面积最值时由于思考方向不同，导致方法选择的不同，答题的时间势必也存在差异，较好地体现区分度.

4.3 素养导向的试题命制

数学素养指的是考生在陌生情境中运用数学知识与方法的自觉性、熟练性和准确性[3].

本题的十一种解题方法表明，基于素养导向命制的试题，考查方向通常有两个：一是考查学生会不会从试题背景中抽象出数学的模型；二是准确地运用数学思想方法解决相应的数学问题.从数的角度出发，构建目标函数，关键考查学生是否会选择合适的自变量以及用合适方法求解函数的值域；从形的角度出发，关键考查学生发现动点 A 与定点 B，D 的关系，从而得到点 A 的轨迹方程，再求得最值.

参考文献:

[1]任子朝.从能力立意到素养导向[J].中学数学教学参考（上旬），2018(5):1.

[2]蔡海涛.解三角形[J].中学数学教学参考（上旬），2020(3):42-44.

[3]柯跃海.选拔性数学考试的命题与评价[M].西安:陕西师范大学出版总社，2018.