一道2020年高考数列填空题的深入思考

蔡海涛[1] 陈凌燕[2] 翁建新[3]

（1福建省莆田第二中学351131 2厦门市海沧中学 361022 3 莆田第四中学351100）

本文系2019年度福建省基础教育课程教学研究课题《核心素养导向下高中数学阅读教学模式的研究》（课题编号:MJYKT2019-106)的研究成果.

摘要:本文以一道2020年高考全国卷Ⅰ文科第16题的数列问题为例，分析其解法并进行变式拓展，归纳探析含递推关系数列问题的常用求解策略.

关键词:递推数列 变式拓展 求解策略

高考对数列的考查突出基础性，重点考查考生对数列通性通法的理解与应用，有时也考查综合性较强的数列问题，如以递推关系为载体的数列问题，这类问题将基础知识的考查和能力的考查有机地结合，解题方法灵活多样，技巧性较强. 本文以一道2020年高考全国卷Ⅰ文科第16题的数列问题为例，谈谈含递推关系数列问题的常用求解策略.

一、试题呈现

（2020年高考全国卷Ⅰ·文16）数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}+(-1)^n a_n=3n-1$，前16项和为540，则$a_1=$ ____________.

二、试题分析

本题以递推数列的关系式为载体，考查数列的递推公式及数列的求和等基础知识，考查推理论证及运算求解能力，考查分类与整合、特殊与一般、函数与方程思想，考查逻辑推理、数学运算等核心素养.

本题只须对n分奇偶数进行讨论，分别得出奇数项、偶数项的递推关系，由奇数项递推公式将奇数项用a_1表示，由偶数项递推公式得出偶数项的和，建立以a_1为变量的方程，求解即可得出结论.

三、解法探析

解析 当n为偶数时，有$a_{n+2}+a_n=3n-1$，

所以$(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+(a_{10}+a_{12})+(a_{14}+a_{16})=5+17+29+41=92$.

因为数列$\{a_n\}$前16项和为540，所以$a_1+a_3+a_5+...+a_{15}=448$.

当n为奇数时，有$a_{n+2}-a_n=3n-1$，

则$a_{n+2}=a_1+\left(a_3-a_1\right)+\left(a_5-a_3\right)+...+\left(a_{n+2}-a_n\right)$

$=a_1+3\left(1+3+5+...+n\right)-\dfrac{1+n}{2}=a_1+\dfrac{3}{4}n^2+n+\dfrac{1}{4}$.

所以$a_1+a_3+a_5+...+a_{15}=a_1+\dfrac{3}{4}\left(1^2+3^2+5^2+...+13^2\right)+\left(1+3+5+...+13\right)+\dfrac{7}{4}=448$

解得$a_1=7$.

点评　本题的难点在于已知式子中含有 $(-1)^n$，可对其进行分类讨论，分为奇数项和偶数项再进行分组求和，而偶数项的求和又注意到每连续两项的和构成等差数列，通过并项求和得出前 16 项中偶数项的和为 92，而奇数项的求和是先利用累加法求得 a_{n+2} 与 a_1 的关系，然后把奇数项的和用 a_1 表示，进而把前 16 项和用 a_1 表示，最后求得 a_1 的值.

四、变式拓展

变式 1 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+(-1)^n n$，则 $a_{20}=$________.

解析 当 n 为奇数时，$a_{n+1}-a_n=-n$，当 n 为偶数时，$a_{n+1}-a_n=n$，故

$$a_{20}=\left[(a_{20}-a_{19})+(a_{18}-a_{17})+...+(a_2-a_1)\right]+\left[(a_{19}-a_{18})+(a_{17}-a_{16})+...+(a_3-a_2)\right]+a_1$$

$$=-(19+17+...+1)+(18+16+...+2)+1=-9.$$

变式 2 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=n$，若 $S_{17}=70$，则 $a_{2021}=$________.

解析 当 n 为奇数时，有 $a_{n+1}-a_n=n$，$a_{n+2}+a_{n+1}=n+1$, 则 $a_{n+2}+a_n=1$；

当 n 为偶数时，有 $a_{n+1}+a_n=n$，$a_{n+2}-a_{n+1}=n+1$，则 $a_{n+2}+a_n=2n+1$.

故 $(a_3+a_5)+(a_7+a_9)+(a_{11}+a_{13})+(a_{15}+a_{17})=4$；

$(a_2+a_4)+(a_6+a_8)+(a_{10}+a_{12})+(a_{14}+a_{16})=5+13+21+29=68$，

从而 $S_{17}=a_1+72=70$，得 $a_1=-2$. 因为 $a_{n+2}+a_n=1$, 所以 $a_1=a_5=a_9=a_{4n+1}$，

所以 $a_{2021}=a_1=-2$.

点评 变式 1 及变式 2 与本文 2020 年高考题解法类似，先对 n 分奇数和偶数讨论，通过分组求和寻找规律性突破难点.

变式 3（**2012 年高考全国卷Ⅱ·理 16**）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}+(-1)^n a_n=2n-1$，则 $\{a_n\}$ 的前 60 项和为_________.

解析 设 $a_1=a$，由已知得 $a_2=1+a$，$a_3=2-a$，$a_4=7-a$，$a_5=a$，$a_6=9+a$，

$a_7=2-a$，$a_8=15-a$，$a_9=a\ ...$ 令 $b_{n+1}=a_{4n+1}+a_{4n+2}+a_{4n+3}+a_{4n+4}$ 则可证得

$b_{n+1}=a_{4n+1}+a_{4n+2}+a_{4n+3}+a_{4n+4}=a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n}+16=b_n+16$，

又$a_1+a_2+a_3+a_4=10$，则$\{a_n\}$的前 60 项和为$10\times15+\dfrac{15\times14}{2}\times16=1830$.

点评 解决递推数列的问题，通常可以用特殊值探路，写出前几项，先归纳后猜想寻求一般规律.本题就是基于特殊与一般的思想，发现数列$\{a_n\}$每连续四项之和成等差数列这个关系，从而突破了难点.

五、归纳总结

由以上例题及变式的解题分析，可以总结出含递推关系数列问题的一般求解策略：首先要重视通性通法，理清知识网络，切实掌握数列的概念与性质，把已知的递推关系进行转化，发现或构造等差或等比数列；其次要强化合情推理，数列是按一定次序排列的一列数，这决定了数列解题中离不开规律性和技巧性的探究，故灵活应用合情推理方法解决数列问题就显得尤为重要，通常应用分类与整合及特殊与一般的数学思想寻找解题的突破口.教师要引导学生领会以上两条解题策略,启发学生学会联想、探索、反思、创新、总结归纳，这样才会在解题过程中不断提升能力和素养[1].

六、对点训练

训练 1（2012 年高考福建卷 •理 14）数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=n\cos\dfrac{n\pi}{2}+1$，前$n$项和为$S_n$，

则$S_{2012}=$___________.

【答案】3018.

训练 2（2013 年高考湖南卷・理 15）设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，$S_n=\left(-1\right)^n a_n-\dfrac{1}{2^n}$，

$n\in N^*$，则（1）$a_3=$_____；（2）$S_1+S_2+...+S_{100}=$___________.

【答案】(1) $a_3=-\dfrac{1}{16}$. (2) $\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2^{100}}-1)$.

参考文献：

[1]蔡海涛，卓晓萍，卢妮，张靖毅.多径探幽直通平行　一题多解提升素养[J].中小学数学（高中版），2020(6):56-58.