基于数学核心素养的解三角形试题的命制与思考

黄少莹　　蔡海涛

福建省莆田第二中学

【摘要】为了回应中国高考评价体系，适应高考从能力立意到素养导向的转变，结合参与“2020 年莆田市中高考原创试题比赛”做了基于核心素养的试题命制尝试，以一道解三角形试题的命制为例，阐述了试题的命制过程及命题思考.

【关键词】核心素养　试题命制　命题思考

2019 年 11 月，教育部考试中心发布“中国高考评价体系”. 高考评价体系由“一核”“四层”“四翼”组成，其中：“四层”为考查内容，即核心价值、学科素养、关键能力、必备知识.《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》指出：“命题应依据学业质量标准和课程内容，注重对学生的数学核心素养的考查.”可见，教师不仅要以培育学生的数学核心素养为教育培养目标，在试题的命制中也要以核心素养为导向，符合课程标准的精神和基本要求. 为此，笔者以参加 2020 年“莆田市中高考原创试题比赛”一道解三角形试题的命制过程为例，谈谈基于数学核心素养的试题命制问题，期与同行交流.

1 试题展示

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$a=13$，$b>c$，$\triangle ABC$ 内切圆圆 I 面积为 3π，则 $\cos\angle ABC=$________；若点 D 在 AC 上，且 B，I，D 三点共线，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=$_________.

2 命题意图

2.1 考查目标

本题主要考查正余弦定理、三角恒等变换、向量的基本运算、直线与圆的位置关系等基础知识；考查推理论证能力、运算求解能力；考查数形结合思想、函数与方程思想、化归与转化思想；考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养，体现综合性、应用性、创新性.

2.2 学科核心素养的表现及其级别

表 1 学科核心素养的表现及其级别

知识要点	考查的核心素养	核心素养表现	素养级别
正弦定理、余弦定理、三角形面积公式、向量的数量积	逻辑推理 数学运算	能够关联正、余弦定理与三角形面积公式，通过对已知条件的分析，探索论证思路；针对运算问题，合理选择运算方法，设计运算程序，解决问题.	水平二
二倍角公式、两角和与差的正余弦公式	直观想象 数学运算	借助图形发现图形与数量的关系，探索解决问题的思路，形成数形结合的思想；在综合运用运算方法解决问题的过程中体会运算程序的作用.	水平二

3 命制过程

3.1 立意与选材

原型 1：（2016 年高考全国卷Ⅰ·理 17）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c.$

(1) 求 C；(2) 若 $c=\sqrt{7}$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

原型 2：（2017 年高考全国卷Ⅱ·理 17）$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $\sin(A+C)=8\sin^2\dfrac{B}{2}$.

(1) 求 $\cos B$；(2) 若 $a+c=6$，$\triangle ABC$ 面积为 2，求 b.

3.2 联系与搭桥

原型 1 第（2）问根据角 C 与边 c，结合面积公式得到 ab 的值，再利用余弦定理得到 $a+b$ 与 ab 的关系求出 $a+b$，进而解决周长问题；原型 2 第（2）问利用面积公式得 ac 的值，再根据 $a+c$ 与 ac 的值结合余弦定理求出 b 的值. 两个原型都应用了余弦定理和三角形面积公式，利用两边之和与两边之积的关系进行命题. 基于此，笔者以三角形的内切圆为载体，考虑到内切圆圆心（内心）可与角平分线结合起来，故与三角恒等变换、平面向量等知识进行交汇命题，先得到将三角形的面积与周长的关系，进而得到两边之和与两边之积的关系，结合余弦定理也可得到两边之和与两边之积的关系，从而求出 a，b 的值. 为了方便计算，笔者通过几何画板对三角形边长进行调试，最终选定"$A=\dfrac{2\pi}{3}$，内切圆半径为 $\sqrt{3}$，边为 $a=13$，$b=8$，$c=7$"的三角形为模型. 一方面降低运算难度，一方面结合面积、直线与圆的相切等基础知识，可以在结论上进行多方位设问. 旨在考查学生利用正余弦定理解三角形的同时，联系平面几何的知识灵活解题.

3.3 加工与调整

【一稿】 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$a=13$，$b>c$，$\triangle ABC$ 内切圆圆 I 面积为 3π.

（1）求 b，c 的值；

（2）若点 D 在 AC 上，且 B，I，D 三点共线，求 BD 的长.

这一稿通过内切圆半径，利用等积法得到 $b+c$ 与 bc 的关系，由 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$a=13$ 结合余弦定理也可得到 $b+c$ 与 bc 的关系，进而求得 b，c 的值. 在求 BD 边长度时考查学生正余弦定理、三角恒等变换等知识，解题方法较多. 但为了便于第二步结合角平分线利用三角恒等变换，笔者将第(1)问改为求 $\cos\angle ABC$，得到二稿.

【二稿】 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$a=13$，$b>c$，$\triangle ABC$ 内切圆圆 I 面积为 3π.

（1）求 $\cos\angle ABC$；

（2）若点 D 在 AC 上，且 B，I，D 三点共线，求 BD 的长.

2019 年 11 月，教育部考试中心发布"中国高考评价体系"，强调了"四翼"的考查要求，即"基础性、综合性、应用性、创新性"[1]. 基于此，笔者把解三角形与向量的数量积进行交汇，递进设问，设置问题可以多角度做答，考查灵活运用所学知识分析问题和解决问题的能力，考查学生的综合应用能力及数学素养，进一步改编确定终稿.

【定稿】 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$a=13$，$b>c$，$\triangle ABC$ 内切圆圆 I 面积为 3π，则 $\cos\angle ABC=$__________；若点 D 在 AC 上，且 B，I，D 三点共线，则 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=$__________.

4 解法展示

4.1 思路分析

第（1）问：内切圆半径并结合角 A 对应的面积公式，应用等积法可得到 $b+c$ 与 bc 的等量关系，由余弦定理也可得到关于 $b+c$ 与 bc 的等量关系，进而求得 b，c 的值，再结合余弦定理即可解决问题.

第（2）问：易知 BD 平分 $\angle ABC$，进而结合二倍角公式可求得 $\cos\angle DBC$. 在求 BD 时，常规方法是在 $\triangle ABD$ 中，结合 BD 及其角 A，边 AB 及其对角 $\angle ABD$，根据正弦定理进行求解；也可考虑求出 AD 结合余弦定理进行求解，这是解三角形的通性通法. 也可考虑根据面积结合二倍角公式求 BD；也可考虑到 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的数量积公式与 $\triangle BCD$ 面积公式形式的相似性，将所求的数量积转化为求 $\triangle BCD$ 面积，该法具有一定的特殊性.

4.2 解法呈现

解：（1）由 $\triangle ABC$ 内切圆圆 I 面积为 3π，可得圆 I 半径 $r=\sqrt{3}$，则

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot(13+b+c)=\frac{1}{2}bc\sin\frac{2\pi}{3}$，故 $bc=26+2(b+c)$． ①

由余弦定理得 $b^2+c^2-2bc\cos\frac{2\pi}{3}=b^2+c^2+bc=81$，整理得 $\left(b+c\right)^2-bc=169$．

将①式变形代入得 $\left(\frac{bc}{2}-13\right)^2-bc=169$，整理得 $\left(bc\right)^2-56bc=0$．

由于 $bc>0$，故 $bc=56$，因此 $b+c=15$．又 $b>c$，从而求得 $b=8$，$c=7$．

结合余弦定理得 $\cos\angle ABC=\frac{13^2+7^2-8^2}{2\times13\times7}=\frac{11}{13}$．

（2）解法一：依题意可知 I 为内心，故 BD 平分 $\angle ABC$．记 $\angle ABD=\angle DBC=\theta$，

则 $\cos\angle ABC=\cos2\theta=\frac{11}{13}$，故 $\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos2\theta}{2}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}$，$\sin\theta=\sqrt{\frac{1-\cos2\theta}{2}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$．

$\triangle ABD$ 中，$\angle ADB=\pi-\frac{2\pi}{3}-\theta=\frac{\pi}{3}-\theta$，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{c}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}$．

由于 $\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{5\sqrt{13}}{26}$，$c=7$，故 $BD=\frac{7\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{26}}=\frac{7\sqrt{3}}{2}\times\frac{26}{5\sqrt{13}}=\frac{7\sqrt{39}}{5}$．

故 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\theta=\frac{7\sqrt{39}}{5}\times13\times\frac{2\sqrt{39}}{13}=\frac{546}{5}$．

解法二：同解法一得 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{39}}{13}$．

由于 BD 平分 $\angle ABC$，因此点 D 到 AB，CD 的距离相等，故 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{AB}{BC}=\frac{7}{13}$．

又 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{AD}{DC}$，故 $\frac{AD}{DC}=\frac{7}{13}$．由于 $AC=8$，从而 $AD=\frac{7}{20}\times AC=\frac{14}{5}$．

$\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{39\times7^2}{25}$，故 $BD=\frac{7\sqrt{39}}{5}$．下同解法一.

解法三：同解法一得 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{39}}{13}$．由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle DBC}$ 得 $\frac{1}{2}ac\sin2\theta=\frac{1}{2}\left(a+c\right)\cdot BD\cdot\sin\theta$，

整理得 $BD=\frac{2ac\cdot\cos\theta}{a+c}=\frac{91\cos\theta}{10}=\frac{91}{10}\times\frac{2\sqrt{39}}{13}=\frac{7\sqrt{13}}{5}$．下同解法一.

解法四：同解法一得 $\sin\theta=\frac{\sqrt{13}}{13}$，$\cos\theta=\frac{2\sqrt{39}}{13}$．

由于 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\theta$，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin\theta$，

故 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{2S_{\Delta BDC}\cdot\cos\theta}{\sin\theta}=4\sqrt{3}\,S_{\Delta BDC}$．

由于 BD 平分 $\angle ABC$，因此点 D 到 AB，CD 的距离相等，故 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle CBD}}=\frac{AB}{BC}=\frac{7}{13}$，

从而 $S_{\Delta BCD}=\frac{13}{20}S_{\Delta ABC}$．

故 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=4\sqrt{3}S_{\Delta BDC}=4\sqrt{3}\times\frac{13}{20}\times\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{13\sqrt{3}}{5}\times\frac{1}{2}\times 7\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{546}{5}$.

解法五：由于 BD 平分 $\angle ABC$，故同解法二得 $\frac{AD}{DC}=\frac{7}{13}$.

因此 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{7}{20}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，且 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

又 $\overrightarrow{AC}^2=64$，$\overrightarrow{AB}^2=49$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-28$，

故 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{7}{20}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{7}{20}\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-\frac{27}{20}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{546}{5}$.

5 命题拓展

方案 1：高考关注与创新密切相关的能力和素养，因此笔者考虑以开放性、探究性的问题形式呈现，促使学生主动思考，善于发现新问题、找到新规律、得出新结论[2].

【改编 1】(1) $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c．已知 $A=\frac{2\pi}{3}$，$a=13$，$b>c$，$\triangle ABC$ 内切圆圆 I 面积为 3π，在 BC 边上是否存在点 M 使得 $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CM}$．若存在，求出点 M 的位置；若不存在，说明理由.

简解：记圆 I 与 BC 边切于点 D，根据切线长定理可求得 $BD=6$，$CD=7$，设 $BM=x$，则 $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BM}=BD\cdot BM=6x$，$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CM}=CD\cdot CM=7(13-x)$ 可求得 $BM=x=7$．故 BC 边上满足 $BM=7$ 的点 M 即为所求的点.

（2）已知 $\triangle ABC$ 的内切圆圆 I 与边 BC 切于点 D．在 BC 边上是否存在点 M 使得 $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{CM}$．结合（1）的求解，你能给出一般性的结论吗？并说明理由.

简解：（2）类比（1）的做法可得 BC 边上满足 $BM=CD$ 的点 M 即为所求的点.

方案 2：由角 A 与 a 边确定，得三角形的外接圆确定，即点 A 在定圆上运动．因此考虑将圆换为其他的圆锥曲线，考查椭圆、双曲线的定义及离心率.

【改编 2】（1）椭圆 C 的焦点为 F_1，F_2，$|F_1F_2|=13$，P 为 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，$\triangle F_1PF_2$ 内切圆面积为 3π，则 C 的离心率为_________.

简解：由内切圆半径及等积法，结合余弦定理可得 $2a=15$，$e=\frac{2c}{2a}=\frac{13}{15}$.

（2）双曲线 C 的焦点为 F_1，F_2，$|F_1F_2|=13$，P 为 C 上一点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{2\pi}{3}$，$\triangle F_1PF_2$ 内切圆面积为 3π，则 C 的离心率为__________.

简解：由内切圆半径及等积法，结合余弦定理可得 $2a=1$，$e=\frac{2c}{2a}=13$.

方案 3：更改条件，已知的角 A 与边 a 中将边 a 的长更改为“在 AC 边上存在点 D 使得 $BD=BC$”，并给出 $\angle ABD$ 的余弦值以确定点 D 的位置，进一步设置问题求角并结合内切圆设问.

【改编 3】如图 1，$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.

已知 $A=\frac{\pi}{3}$，点 D 在 AC 上，且 $BD=BC$，$\cos\angle ABD=\frac{13}{14}$，

（1）求 $\sin\angle ABC$ 的值；

（2）若 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，且与 BC 切于点 E，求 $\triangle BDE$ 与 $\triangle CDE$ 的面积比.

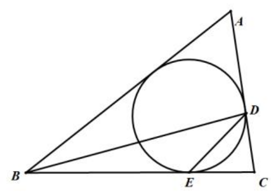

图1

简解：（1）由 $BD=BC$ 知 $\angle BDC=\angle C$，由 $\cos\angle ABD=\frac{13}{14}$ 得 $\sin\angle ABD=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

故 $\sin\angle ABC=\sin(A+C)=\sin(A+\angle BDC)=\sin(2A+\angle ABD)=\sin(\frac{2\pi}{3}+\angle ABD)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

（2）由三角形的内角和以及正弦的和角公式可求得 $\sin A:\sin\angle ABC:\sin C$ 的值，结合正弦定理可得 $a:b:c$ 的值.由内切圆半径利用等积法可求出三边为 $a=8$，$b=5$，$c=7$.利用切线长定理可得 $AB-AC=BE-CE=c-b=2$.又 $BE+CE=a=8$，故求得 $BE=5$, $CE=3$，因此 $\triangle BDE$ 与 $\triangle CDE$ 的面积比为 $\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{BE}{CE}=\frac{5}{3}$.

6 命题反思

6.1 素材积累,打造原型

命题的过程是教师进一步研究、把握教材的过程.若想“腹有诗书，字有珠玑”，就要注重多方面、多角度对文章素材的积累，数学命题也是如此.一道好题，一份好卷需要教师平时对命题素材的积累.笔者常用以下方式方法：高考真题的整理、归类、研究；改编课本例题、习题，积累题材；收集学生的典型错误，综合题材；关注生活的情景，挖掘题材.教师注意素材的积累并持这以恒,以后的命题才能内化于心，外化于形.

6.2 突出主干,综合考查

命制一份试卷犹如建造一座房屋，房屋中的框架部分就是主干知识的考查.主干知识的考查题干要简洁清晰，明晰知识模块的考查目标，关注考查考生的能力、思想、素养，参照数学学科核心素养的评价框架与水平划分进行试题命制.为了落实考查目标，需要制订双向细目表规范命题，可有效避免命题者的主观随意性.考查知识的载体既要覆盖知识面，又要突出重要考点，做到点面结合，并且各部分考查权重应与教学课时数相搭配，而认知水平维度可参照学科的能力水平目标，每一水平与各个知识内容维度对应匹配.

6.3 控制难度，精心磨题

一份好的试卷要有较好的效度、信度、难度和区分度.试卷的难度进行一定的控制可让学生在愉悦的状态下积极思考，这也体现了命题者的人文关怀. 同时，试题设计解题入口方向较多，有多种解法，可以给不同思维能力层次的考生提供了不同的解题策略，而寻求简洁的解题方法是数学能力和素养的一种体现.最后，命题者要站在考生的角度，认真磨题、对稿、作答，避免科学性错误.

参考文献

[1]教育部考试中心.中国高考评价体系[M].北京: 人民教育出版社, 2019.
[2]教育部考试中心.中国高考评价体系说明[M].北京: 人民教育出版社, 2019.