2019年高考全国卷Ⅱ文科数学第20题深度赏析

潘敬贞[1]　　蔡海涛[2]

（1广东省汕头市澄海华侨中学　　2福建省莆田第二中学 ）

摘　要：高考试题是命题专家精雕细琢的结果，凝聚了命题专家的智慧结晶.高考题不仅具有选拔功能，还承载着引导教学、育人等多重使命.众多高考题都有多种解法，为不同考生提供了多样的思考空间和解答路径，本文主要对2019高考全国2卷文数20题进行解法探讨和变式探究，与同行交流.

关键词：高考题；解法探讨；变式探究

每一道高考试题都是命题专家的智慧结晶，高考题不仅承载着选拔使命，还承载着引导教学、育人等多重使命.很多高考题的解法并不唯一，为不同考生提供了多样的思考空间和解答路径，在某种程度上体现了试题的人文关怀，更是命题专家智慧的体现.本文以2019年高考全国卷Ⅱ文数第20题为例，进行多解分析和变式探究，以期与同行交流.

一、试题呈现与分析

已知F_1,F_2是椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的两个焦点，$P$为$C$上的点，$O$为坐标原点.

（1）若$\triangle POF_2$为等边三角形，求C的离心率；

（2）如果存在点P，使$PF_1\perp PF_2$，且$\triangle F_1PF_2$的面积等于16，求b的值和a的取值范围.

本道的第一问是以椭圆的焦点三角形为背景，求椭圆的离心率，该问主要考查椭圆定义和基本性质，试题难度不大，很多学生都能够轻松作答.第二问是以椭圆焦点三角形为研究背景，以三角形面积为研究对象，求椭圆的参数的值和范围.该问主要考查椭圆基本性质，焦点三角形面积，直线与圆锥曲线的位置关系等知识，考查学生的推理论证与运算求解等能力，考查数形结合、化归转化及函数方程思想等数学思想方法，考查逻辑推理、直观想象、数学运算等数学核心素养.

本道试题并不难，试题素材和问题设置学生并不陌生，提出的问题都是解析几何中较为基础、常规的问题.试题入口宽，层层递进，有利于学生的解答.试题的解答最关键是通过直观想象、数形结合等过程将题设的几何条件转化为代数进行处理，其解题智慧点是选择恰当的化归方式进行优化推理过程.试题突出以知识为载体，重点考查数学“四基”和“四能”，考查学生的核心素养水平.试题具有很好的信度与效度，对其进行求解探讨和变式探究对提升学生解题能力，发展数学素养水平，提高备考效益等具有积极意义.

二、解法赏析

(1)**解法1：**连接PF_1，由ΔPOF_2为等边三角形知，在ΔF_1PF_2中，$\angle F_1PF_2=90^0$，所以$PF_2=c$，$PF_1=\sqrt{3}c$，根据椭圆定义得$2a=PF_1+PF_2=(\sqrt{3}+1)c$，所以椭圆$C$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

解法2：连接PF_1，由ΔPOF_2为等边三角形知，在ΔF_1PF_2中，$\angle F_1PF_2=90^0$，所以$PF_2=c$，根据椭圆定义得：$PF_1=2a-c$，由勾股定理$c^2+(2a-c)^2=(2c)^2$，即$2a^2-2ac=c^2$，两边同除以a^2得$e^2-2e-2=0$，解得$e=\sqrt{3}-1$.

解法3：连接PF_1，由ΔPOF_2为等边三角形得$\angle POF_2=60^0$，$PF_2=c$，故$\angle POF_1=120^0$，在ΔPOF_2中根据正弦定理得：$\dfrac{|PF_1|}{\sin 120^0}=\dfrac{c}{\sin 30^0}$，所以$PF_1=\sqrt{3}c$，根据椭圆定义得$c+\sqrt{3}c=2a$，所以椭圆$C$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

解法4：连接PF_1，由ΔPOF_2为等边三角形得$\angle POF_2=60^0$，$PF_2=c$，故$\angle POF_1=120^0$，在ΔPOF_2中根据正弦定理得：$|PF_1|^2=|PO|^2+|OF_1|^2-2|PO|\cdot|OF_1|\cos\angle POF_1=3c^2$，所以$PF_1=\sqrt{3}c$，根据椭圆定义得$c+\sqrt{3}c=2a$，所以椭圆$C$的离心率$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$.

解法5：由ΔPOF_2为等边三角形得$P(\dfrac{c}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}c)$，代入椭圆方程得$\dfrac{(\frac{c}{2})^2}{a^2}+\dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2}c)^2}{b^2}=1$，所以$b^2c^2+3a^2c^2=4a^2b^2$

又 $b^2=a^2-c^2$，所以整理得 $4a^2-8a^2c^2+c^4=0$ ，等式两边同时除以 a^4 得：$4-8e^2+e^4=0$，结合 $0<e<1$ 解得 $e^2=4-2\sqrt{3}$，所以椭圆 C 的离心率 $e=\sqrt{3}-1$.

解法 6：由 ΔPOF_2 为等边三角形得 $P(\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}c)$，$PF_2=c$，所以 $PF_2=a-ex_p$，即 $c=a-e\frac{c}{2}$，整理得：

$e^2+2e-2=0$，解得：$e=\sqrt{3}-1$.

评注：解法 1—解法 4 其本质是一样的，都是围绕焦点三角形进行求解. 解法 1 与解法 2 通过连接 PF_1 后根据直角三角形的性质得 ΔPF_1F_2 是直角三角形，再结合椭圆定义进行求得椭圆的离心率，解答思路简单、过程简洁，这两种解法是解答该题的最佳解法. 解法 3 和解法 4 连接 PF_1 后在 ΔPOF_2 中利用正余弦定理求得 PF_1，再结合椭圆定义也可求得椭圆的离心率，这两种解法的解答过程也不是很复杂，若一时没想到 ΔPF_1F_2 是直角三角形，解法 3 和解法 4 也是不错的选择. 解法 5 是将点 P 的坐标代入椭圆方程得出关于 a，b，c 的方程，再结合 $b^2=a^2-c^2$ 即可求出椭圆的离心率，该解法自然，思路清晰，但对运算求解能力的要求相对较高. 解法 6 是利用椭圆的第二定义，虽然教材没有专门介绍椭圆第二定义，但教材例题蕴藏着该方法，该解法的解答思路清晰、过程简洁，解答小题用该解法达到快速、高效的目的.

（2）**解法 1** ：设 $P(x,y)$ 则依题意得 $\frac{1}{2}|y|\cdot 2c=16$，$\frac{y}{x+c}\cdot\frac{y}{x-c}=-1$，即 $c|y|=16$ ①，$x^2+y^2=c^2$ ②，又 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ③，由②③及 $a^2=b^2+c^2$ 得 $y^2=\frac{b^4}{c^2}$ 又由①知 $y^2=\frac{16^2}{c^2}$，所以 $b=4$. 由②③得 $x^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-b^2)$，所以 $c^2\ge b^2$，从而 $a^2=b^2+c^2\ge 2b^2=32$，所以 $a\ge 4\sqrt{2}$. 所以 $b=4$，a 的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

评注：解法 1 是通过设点 P 的坐标，然后根据题意列出相关的方程并求解得 b 的值，再通过代数变形以及不等关系 a 的取值范围. 该解法解题思路清晰，容易想到，但对运算求解能力和推理论证能力的要求比较高.

解法 2：设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，由 ΔF_1PF_2 的面积等于 16，所以得 $r_1\cdot r_2=32$ ①，又根据椭圆定义得：$r_1+r_2=2a$ ②，由 $PF_1\perp PF_2$ 得 ${r_1}^2+{r_2}^2=(2c)^2$ ③，由①②③及 $a^2=b^2+c^2$ 解得 $b=4$.

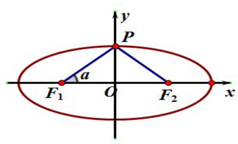
又 $2a=r_1+r_2\ge 2\sqrt{r_1\cdot r_2}=2\sqrt{32}=8\sqrt{2}$ （当且仅当 $r_1=r_2$ 时等号成立），所以 $a\ge 4\sqrt{2}$. 所以 $b=4$，a 的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

评注：解法 2 主要利用椭圆定义、三角形面积公式、勾股定理列有关方程，然后结合椭圆中基本量的关系解得 b 的值，最后利用基本不等式求得 a 的取值范围. 该解法的思路也非常清晰，也容易想到的解法，同时减少了运算量，是该题的通解.

解法 3：设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，由 ΔF_1PF_2 的面积等于 16，所以得 $r_1\cdot r_2=32$，又根据椭圆定义得：$r_1+r_2=2a$，所以 r_1,r_2 是方程 $x^2-2ax+32=0$ 的两根，所以有 $\begin{cases} a>0 \\ (-2a)^2-4\times 32\ge 0 \end{cases}$，所以 $a\ge 4\sqrt{2}$. 由 $PF_1\perp PF_2$ 得 ${r_1}^2+{r_2}^2=(2c)^2$，又 $r_1+r_2=2a$，所以 $2r_1\cdot r_2=4b^2$，所以 $b=4$. 所以 $b=4$，a 的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

评注：该解法思路清晰，运算量小，过程简洁、高效. 该解法的巧妙之处是将方程思想使用得淋漓尽致.

解法 4：依题意得 $S_{\Delta F_1PF_2}=b^2\tan\frac{\pi}{4}=b^2=16$ ，$b=4$，因为存在点 P，使得 $PF_1\perp PF_2$，



所以只需最大角等于 90°. 设 $\angle PF_1F=\alpha$ 则 $\sin\alpha=\frac{b}{a}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $a\ge 4\sqrt{2}$，所以 $b=4$，a 的取值范围为 $[4\sqrt{2},+\infty)$.

评注：该解法用到焦点三角形面积的结论快速求出 b 的值，再利用数形结合很快解得 a 的取值范围，但需要注意的是，在解答题的解答过程中焦点三角形面积的结论不能直接使用，需要有解答、推理过程. 但若在解答客观题时该解法是很不错的选择，可以快速准确的解决问题.

三、变式探究

情景变式和过程变式是试题变式的重要路径，这两种变式都有利于揭示问题的本质，拓展问题的外延，对培育学生的数学能力，发展学生的核心素养水平都大有裨益.

变式 1：已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，以 F_1F_2 为边作正三角形，若椭圆恰好评分正三角形的两边，则 C 的离心率是__________.【答案：$\sqrt{3}-1$】

变式 2：已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 是椭圆 C 上一点，以椭圆的焦距为直径的圆交椭圆于四个不同的点，顺次连接四个点和两个焦点，恰好围成一个正六边形，则 C 的离心率是__________.
【答案：$\sqrt{3}-1$】

变式 3：已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，P 是椭圆 C 上一点，直线 PF_1 与 PF_2 倾斜角的差为 90^0，且直线 PF_1 的斜率为 2，则 C 的离心率是__________.【答案：$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$】

变式 4：已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，过 F_2 作椭圆长轴的垂线交椭圆于点 P，若 ΔF_1PF_2 为等腰直角三角形，则 C 的离心率是__________.【答案：$\sqrt{2}-1$】

变式 5：已知长方形 $ABCD$，$AB=4$，$BC=3$，则以 A、B 为焦点且过 C、D 两点的椭圆的离心率是__________.【答案：$\dfrac{1}{2}$】

评注：变式 1——变式 5 都是对考题的第一问进行情景变式，将问题的情景和表述进行变换，但问题的本质是相同的，求解思路基本一致.通过对变式 1——变式 5 的求解让学生在变中寻找不变的本质，加深学生对问题本质的理解，提高审题能力、分析问题能力、解决问题能力，提升学生的数学思维能力、应变能力等.

变式 6：已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，若椭圆 C 上存在一点 P，使得 $\angle F_1PF_2=60^0$，则椭圆 C 的离心率的取值范围是__________.【答案：$[\dfrac{1}{2},1)$】

变式 7：已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点，若椭圆 C 的内部总存在一点 M 满足 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则椭圆 C 的离心率的取值范围是__________.【答案：$(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$】

变式 8（2017 全国卷 1 文 12 改编）：设 A、B 是椭圆 C：$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{m}=1$ 长轴的两个端点，若 C 上存在点 M 满足 $\angle AMB=120^0$，则椭圆 C 的离心率的取值范围是__________.【答案：$(0,\dfrac{\sqrt{2}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{6}}{3},1)$】

评注：考题的第二问是通过已知焦点三角形的面积告知参数 b 的值，椭圆上存在点 P 使 $PF_1\perp PF_2$ 告知参数 a 的取值范围.变式 6——变式 8 是在考题第一问的基础上结合第二问的思路，进一步研究椭圆的性质.变式 6——变式 8 的求解思路从方程思想到寻找不等式关系，试题难度进一步提高，问题的求解对数学能力的要求进一步提高.通过对变式 6——变式 8 的求解进一步提高学生的分析问题能力、解决问题能力，最终提高学生的数学能力，发展学生数学素养水平.

变式 9：已知 F_1,F_2 是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两焦点，以线段 F_1F_2 为边作正三角形 MF_1F_2，若边 MF_1 的中点在双曲线上，则双曲线的离心率是__________.【答案：$\sqrt{3}+1$】

变式 10：F_1 和 F_2 分别是双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两个焦点，A 和 B 是以 O 为圆心，以 $\left|OF_1\right|$ 为半径的圆与该双曲线左支的两个交点，且△ F_2AB 是等边三角形，则双曲线的离心率是__________.【答案：$\sqrt{3}+1$】

变式 11：（2019 全国 I 理 16）已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A,B 两点．若 $\overrightarrow{F_1A}=\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{F_1B}\cdot\overrightarrow{F_2B}=0$，则 C 的离心率为_______.【答案：2】

变式 12：已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的右焦点为 F，若过点 F 且倾斜角为 60^0 的直线与双曲线的右支有且只有一个交点，则此双曲线离心率的取值范围是_______.【答案：$\left[2,+\infty\right)$】

评注：变式 9——变式 12 是切换问题背景，将椭圆换位为双曲线，为一般化研究进行有益探索，同时也为学生应用实践提供有效的素材，对提高学生的分析问题能力和解决问题能力，提高复习备考效益有积极意义.

四、结束语

高考试题具有导向功能，做为一线教师需细细口味，从不同角度对试题进行深度赏析，引导学生对问题本质加深理解，打通知识脉络，编织知识网络，构建知识体系.同时，教师对问题进行情景变式探究，可让学生在变的过程中寻找不变的本质，有利于揭示问题本质；而过程变式探究可引导学生深度学习，拓宽解题思路，训练数学思维，提升数学能力，发展数学素养水平等，从而让学生在解题实践中深化对知识的理解，在解决问题过程中提升数学素养.

参考文献：

[1]刘炳辉.2019 年全国Ⅱ卷文科数学第 20 题探究与探源[J].理科考试研究，2019（17）:8-11..

[2]焦永垚.多角度思考 2019 年全国卷Ⅱ文科第 20 题[J].教学考试（高考数学），2020（2）:34-35.

[3]潘敬贞，郝良.探求命题本源提高命题能力[J].教学考试（高考数学），2020（3）:41-43.

[4]潘敬贞.高三数学二轮复习课的“一题多变”教学策略探微[J].数学通讯（下半月），2018（8）:48-52.