2020年高考数学试题研究　全国卷III　第23题的八种解法

蔡海涛[1]　卓晓萍[2] 卢 妮[3]

题目：（2020年高考全国卷III·理23）设a，b，$c\in\mathbf{R}$，$a+b+c=0$，$abc=1$．用$\max\left\{a,b,c\right\}$表示a，b，c中的最大值，证明：$\max\left\{a,b,c\right\}\geqslant\sqrt[3]{4}$．

解法1：利用消元+基本不等式

不妨设$\max\{a,b,c\}=a$，由$a+b+c=0$，$abc=1$可知，$a>0$，$b<0$，$c<0$．

因为$a=-b-c$，$a=\dfrac{1}{bc}$，所以$a^3=a^2\cdot a=\dfrac{\left(b+c\right)^2}{bc}=\dfrac{b^2+c^2+2bc}{bc}\geqslant\dfrac{2bc+2bc}{bc}=4$．

当且仅当$b=c$时，取等号，所以$a\geqslant\sqrt[3]{4}$，即$\max\{a,b,c\}\ \ \sqrt[3]{4}$．

解法2：　利用基本不等式

同法1，$a>0$，$b<0$，$c<0$．则$\left(-b\right)+\left(-c\right)\geqslant2\sqrt{\left(-b\right)\cdot\left(-c\right)}$，得$a\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{a}}$，解得

$a\geqslant\sqrt[3]{4}$．

解法3：构造一元二次方程

由已知条件得$b+c=-a$，$bc=\dfrac{1}{a}$所以b，c可看成是关于x的方程$x^2+ax+\dfrac{1}{a}=0$的两根．

记$f\left(x\right)=x^2+ax+\dfrac{1}{a}$，对称轴$x=-\dfrac{a}{2}<0$，$f\left(0\right)=\dfrac{1}{a}>0$，

要使$f\left(x\right)=0$的解为负数，只需$\Delta=a^2-\dfrac{4}{a}\geqslant0$即可 ，解得$a\geqslant\sqrt[3]{4}$．

解法4：利用消元+确定主元

由$a+b+c=0$得$b=-a-c$，代入$abc=1$，得$ac^2+a^2c+1=0$，看成关于c的一元二次方程．同法3，要使该方程的解为负数，只要$\Delta=a^4-4a\geq0$即可，解得$a\geqslant\sqrt[3]{4}$．

解法5：利用消元

由$abc=1$得$c=\dfrac{1}{ab}$，由$a+b+c=0$，$a+b+\dfrac{1}{ab}=0$，$a=(-b)+\left(-\dfrac{1}{ab}\right)\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{a}}$

解得$a\geqslant\sqrt[3]{4}$．

解法6：利用柯西不等式

由已知得$b^2+c^2=a^2-2bc=a^2-\dfrac{2}{a}$，$b+c=-a$，由柯西不等式得

$b^2+c^2 \geqslant \dfrac{(b+c)^2}{2}$，所以有 $a^2-\dfrac{2}{a} \geqslant \dfrac{a^2}{2}$，解得 $a \geqslant \sqrt[3]{4}$.

解法 7：利用三角代换

由解法 6，设 $-b=\sqrt{a^2-\dfrac{2}{a}}\cos\theta$，$-c=\sqrt{a^2-\dfrac{2}{a}}\sin\theta$，$\theta \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $a=-b-c=\sqrt{a^2-\dfrac{2}{a}}(\cos\theta+\sin\theta) \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2-\dfrac{2}{a}}$，解得 $a \geqslant \sqrt[3]{4}$.

解法 8：分析法

不妨设 $\max\{a,b,c\}=a$，由 $a+b+c=0$，$abc=1$ 可知，$a>0$，$b<0$，$c<0$.

要证 $a \geqslant \sqrt[3]{4}$，即证 $a^3 \geqslant 4$, 即证 $a^3 \geqslant 4abc$，$a^2 \geqslant 4bc$，

又因为 $b+c=-a$，只需证 $(b+c)^2 \geqslant 4bc$，即 $(b-c)^2 \geqslant 0$，所以原不等式成立.